

有理多结点样条插值曲线及曲面

闫伟齐¹⁾ 丁玮²⁾ 齐东旭^{1),3),4)}

¹⁾(中国科学院计算技术研究所CAD开放研究实验室,北京 100080)

²⁾(联想电脑公司战略发展研究部,北京 100085)

³⁾(北方工业大学CAD研究中心,北京 100041) ⁴⁾(澳门科技大学信息学院,澳门)

摘要 鉴于多结点样条曲线(MSIC)是一种点点通过的插值样条曲线,因此在对多结点样条插值曲线研究的基础上,给出了有理多结点样条插值曲线和有理多结点样条插值曲面的定义,并讨论了有理多结点样条的性质,对有理多结点样条曲线和有理多结点样条曲面的光滑拼接问题进行了讨论.此外,还对有理多结点样条在计算机辅助几何设计中的若干应用问题进行了说明.

关键词 多结点样条 有理多结点样条 插值 几何连续

中图法分类号: TP391.41 文献标识码: A 文章编号: 1006-8961(2001)06-0568-05

Rational Many-Knot Spline Interpolating Curves and Surfaces

YAN Wei-qi¹⁾, DING Wei²⁾, QI Dong-xu^{1),3),4)}

¹⁾(CAD Laboratory, Institute of Computing Technology, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080)

²⁾(Department of Strategic Development, Legend Group, Beijing 100085)

³⁾(CAD Research Center, North China University of Technology, Beijing 100041)

⁴⁾(Macao University of Science and Technology, Macao)

Abstract Many-knot spline interpolating curves (MSIC) are a kind of spline curves that precisely pass through every interpolating point on the curves, many-knot spline interpolating surfaces (MSIS) also pass through every interpolating point on the surfaces. Many-knot spline interpolating curves have been successful applied in many fields, such as computer animation, computer font design and wavelet analysis, etc. Based on studying of many-knot spline interpolating curves, some definitions and properties of rational many-knot spline interpolating curves and those of rational many-knot spline interpolating surfaces are taken into account in this paper. All the concepts and properties discussed in this paper are the first step to research rational many-knot spline interpolating curves and rational many-knot spline interpolating surfaces. Following the properties and definitions, some applications of these rational curves and surfaces are introduced. The problem of continuity of many-knot spline interpolating curves and that of rational many-knot spline interpolating surfaces are discussed by the end of this paper.

Keywords Many-knot spline, Rational many-knot spline, Interpolation, Geometric continuity

0 引言

多结点样条曲线(MSIC)是建立在样条理论基础上的一种插值曲线,文献[1]~文献[6]对其性质

进行了充分讨论.由于这类样条的基函数,是通过对B样条曲线的基函数施行平移和迭加变换而得到的,因此使得多结点样条曲线在插值时,不仅能对型值点点通过,并且能保持样条曲线的局部性、显式表达和容易交互设计的性质.基于插值的样条曲

线已先后在计算机动画、分形图形的生成、计算机字形设计和小波函数的构造中得到了应用^[7~9]. 其 k 次多结点样条插值函数具有如下的数学表示形式:

给定型值点 r_0, r_1, \dots, r_n , 那么, 多结点样条插值曲线可表示为

$$Q(t) = \sum_{i=0}^n q_k(t-i)r_i, t \in [0, n] \quad (1)$$

其中, r_i 称为型值点, $q_k(t)$ 称为 k 次多结点样条插值曲线的基函数, 其数学表达式为

$$q_k(t) = \sum_{j \in \omega} C_j [\Omega_k(t - \Delta_j^{(k)}) + \Omega_k(t + \Delta_j^{(k)})]$$

其中, $\omega = \{0, 1, \dots, k\}$

$$\Omega_k(t) = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k C_{k+1}^j (-1)^j \left(t + \frac{k+1}{2} - j \right)_+^k \quad (2)$$

$\Delta_j^{(k)}$ 为与 k 有关的平移参数. 特别对于 $k=2, 3$ 的情形, 有

$$q_2(t) = (2I - \mu)\Omega_2(t) \quad (3)$$

$$q_3(t) = \left(3I - \frac{8}{3}\mu + \frac{2}{3}\mu^2 \right) \Omega_3(t) \quad (4)$$

其中, $\Omega_2(t)$ 为二次 B 样条曲线的基函数; I 称为单位算子, μ 称为平均算子, 并且满足

$$\mu f(t) = \frac{1}{2} \left(f\left(t + \frac{1}{2}\right) + f\left(t - \frac{1}{2}\right) \right) \quad (5)$$

$k=2$ 时的多结点样条的基函数图形(如图 1).

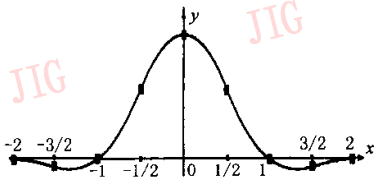


图 1 二次多结点样条的基函数图形

在实际计算中, 二次多结点样条插值曲线可以采用如下的矩阵形式

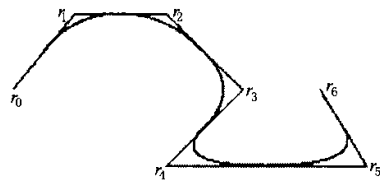
$$Q(t) = \begin{cases} (t^2, t, 1)A(r_{i-1}, r_i, r_{i+1}, r_{i+2})^T \\ ((1-t)^2, (1-t), 1)A(r_{i+2}, r_{i+1}, r_i, r_{i-1})^T \end{cases} \quad (6)$$

其中, 矩阵 A 为

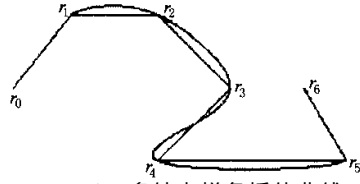
$$A = \begin{bmatrix} 3/4 & -7/4 & 5/4 & -1/4 \\ -1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

本矩阵形式可以用于多结点样条曲线生成的计算, 通过选择不同的 t , 即可得到不同的 $Q(t)$.

多结点样条插值曲线虽可以满足一般曲线的插值要求, 但是对于精度较高的曲线进行插值时误差较大, 为此, 需要采用有理多结点样条插值曲线. 有理多结点样条同 B 样条的异同参见图 2.



(a) B 样条曲线(r_i 为控制点)



(b) 多结点样条插值曲线(r_i 为插值点)

图 2 多结点样条插值曲线和 B 样条曲线区别

1 有理多结点样条插值曲线

1.1 定义

有理 MSIC 可采用如下的不同方式进行定义:

定义 1 已知插值点 r_0, r_1, \dots, r_n 及其权因子 $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n$, 要求找到有理插值曲线 $Q_{RC}(t)$ 满足如下条件

$$Q_{RC}(t) = \frac{\sum_{i=0}^n \omega_i q_{k,i}(t-i) \gamma_i}{\sum_{i=0}^n \omega_i q_{k,i}(t-i)}, t \in [0, n] \quad (8)$$

其中, $Q_{RC}(t)$ 称为有理多结点样条插值曲线, r_i 称为型值点, ω_i 为与 r_i 相关联的权系数, $\omega_0, \omega_n > 0$, 其余 $\omega_i \geq 0$, $q_{k,i}(t)$, 称为 k 次多点样条插值曲线的基函数.

定义 2 有理 MSIC 也可采用如下的形式进行定义, 其中各参数的意义和定义 1 中各参数相同.

$$Q_{RC}(t) = \sum_{i=0}^n \left[\frac{\omega_i q_{k,i}(t-i)}{\sum_{j=0}^n \omega_j q_{k,j}(t-j)} \right] r_i, t \in [0, n] \quad (9)$$

定义 3 有理 MSIC 同样可采用如下的形式进行定义, 其中各参数的意义和定义 1 中的意义相同.

$$Q_{RC}(t) = (\omega_i X_i, \omega_i Y_i, \omega_i Z_i, \omega_i) = \begin{cases} \left(\frac{X_i}{\omega_i}, \frac{Y_i}{\omega_i}, \frac{Z_i}{\omega_i} \right) & \omega_i \neq 0 \\ \infty & \omega_i = 0 \end{cases} \quad (10)$$

其中, $Q_{RC}(t)$ 为四维点 $(\omega_i X_i, \omega_i Y_i, \omega_i Z_i, \omega_i)$ 在 $\omega_i = 1$ 超平面上的投影点 (X_i, Y_i, Z_i) 所确定的曲线.

1.2 性质

有理 MSIC 的 k 次基函数 $L_k^R(t)$, 也称为有理 MSIC 的调配函数, 可以写为如下的形式

$$L_R^{k,i}(t) = \frac{\omega_i q_{k,i}(t-i)}{\sum_{j=0}^n \omega_j q_{k,j}(t-j)}, t \in [0, n] \quad (11)$$

满足下面的性质:

(1) 正规化条件

有理 MSIC 的调配函数满足下述性质:

$$\sum_{i=0}^n L_R^{k,i}(t) = 1, t \in [0, n] \quad (12)$$

(2) 非负性

有理 MSIC 的调配函数不满足曲线的非负性, 也就是说, 下述性质不成立.

$$L_R^{k,i}(t) \geq 0, t \in [0, n] \quad (13)$$

(3) 对称性

$$L_R^{k,i}(t) = L_R^{k,i}(n-t), t \in [0, n] \quad (14)$$

(4) 有限支撑性

$$L_R^{k,i}(0) = 1, L_R^{k,i}(t) = 0, t = 1, \dots, n$$

且 $L_R^{k,i}(t) = 0, |t| \geq k$

(5) 分段性

因有理 MSIC 的调配函数为分段的多项式, 故其有理形式为简单的分段有理函数.

由上述有理 MSIC 的调配函数的性质就决定了有理多结点样条曲线具有以下性质:

① 插值性

一般情况下, 样条曲线可根据调配函数的不同, 分为插值和逼近两种^[10], B 样条曲线就是一种逼近曲线, 图 2 说明了两种样条曲线之间的异同. 由于有理 MSIC 是一种插值曲线, 因此容易通过型值点, 但是其他自由型曲线, 诸如 Bezier 曲线则很难通过这些插值点, 除非进行复杂的计算.

② 仿射不变性

有理 MSIC 的仿射变换可以直接对其控制点进行, 这是由基函数的正规化条件所保证的. 仿射变换包括平移、缩放和旋转等, 有效的仿射变换可以节约计算机的计算时间, 因为先变换型值点再进行插值计算和先进行插值计算再变换曲线上的点所得到的曲线是相同的^[11].

③ 凸包性

由于 MSIC 的调配函数不满足非负性, 所以有理 MSIC 不满足凸包性, 这就意味着有理 MSIC 并不完全包含在其控制顶点所组成的凸包中.

④ 变差缩减性

变差缩减性是指一条直线或一个平面与 MSIC 的交点个数不多于该直线或该平面与 MSIC 控制多

边形的交点个数. 这一性质说明了有理 MSIC 在其凸包内, 没有频繁的振动.

⑤ 对形状的描述

有理 MSIC 可以表示一条曲线上的光滑曲线段和直线段, 也可以表示曲线上的尖点, 这是由 MSIC 的参数连续性和几何连续性来保证的.

⑥ 对圆锥曲线的表达

计算机辅助几何设计中, 初等解析曲线具有非常重要的作用, 如圆弧、椭圆、球、圆柱和旋转面等. 为了表达上的统一, 有理 MSIC 应该如同 NURBS 曲线一样, 可以对圆等曲线进行表示(参见图 3).

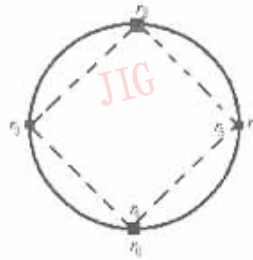


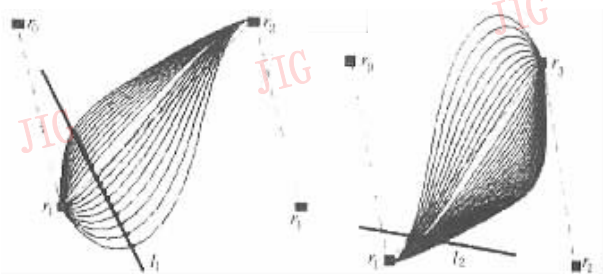
图 3 有理多结点样条曲线对圆的表示

⑦ 透视变换不变性

一般来讲, 虽然大多数非有理曲线不满足透视变换的不变性, 但是在有理曲线中, 根据有理曲线的定义, 先对型值点进行透视变换, 再生成样条曲线和先生成曲线再进行透视变换最后所得到的结果是相同的. 另外, 有理 MSIC 的定义 3 是 高维空间的降维公式, 它说明了有理曲线在透视变换下具有不变的性质.

⑧ 局部性

有理 MSIC 的权因子是附加的形状参数, 它对曲面局部的推拉作用可以局部地定量确定. 由图 4 可见, 分别改变两个控制点 r_1 和 r_2 的权值, 参数相同的点仍位于同一条直线上.



(a) 改变 r_1 的权值得到的一族 (b) 改变 r_2 的权值得到的一族 曲线, 相同参数的点位于直线 l_1 上 曲线, 相同参数的点位于直线 l_2 上

图 4 二次有理多结点样条曲线的权因子对曲线形状的影响

⑨ 端点条件

有理 MSIC 在一般情况下通过除两个端点之外的所有型值点,这种情况要求在端点处强制使用边界条件,其中包括强制使用切线条件、周期条件和重复端点条件。对于准均匀情况,最简单的情況將端点重复两次,这样一来,曲线即可以通过型值点集合中的所有点。

$$r_{n+1} = r_n \text{ 和 } r_1 = r_0 \quad (15)$$

对于均匀的情形,二次有理 MSIC 的切向量满足

$$Q'_{RC_2}(0) = \tau_0, Q'_{RC_2}(n) = \tau_n \quad (16)$$

因此可得

$$r_{-1} = \frac{\omega_1 r_1 + (\omega_1 - \omega_{-1})r_0 - 2\omega_0 \tau_0}{\omega_{-1}} \quad (17)$$

$$r_{n+1} = \frac{\omega_{n-1} r_{n-1} + (\omega_{n-1} - \omega_{n+1})r_n - 2\omega_n \tau_n}{\omega_{n+1}} \quad (18)$$

对于封闭曲线,只需要取如下周期条件

$$\begin{aligned} r_{-1} &= r_{n-1} \\ r_1 &= r_{n+1} (r_0 = r_N) \end{aligned} \quad (19)$$

于是,当 $t \in [0, n]$ 时,有理二次多结点样条函数插值曲线 $Q_{RC_2}(t)$ 即被确定下来。

1.3 有理 MSIC 的离散生成算法

有理 MSIC 和非有理 MSIC 的最大区别是引入了权因子,但是一旦给定权因子,权因子不仅对曲线生成影响不会太大,而且在有理 MSIC 生成的过程中,还会将 $\frac{\omega_i r_i}{\sum_{j=0}^n (\omega_j q_{k,j}(t-j))}$ 当作 MSIC 的插值点看

待,由此可见,有理 MSIC 的离散生成方法和非有理的情况基本相同^[9]。

1.4 有理 MSIC 的连续性

若将两段二次有理 MSIC 进行光滑拼接,为了达到参数 C^1 连续,只要使两段曲线段之间保持具有公共的结点,且两端相邻的两个公共点重合即可^[12,13]。这样一来,两段曲线段即具有公共的切向量。这就是说, C^1 参数连续意味着在两曲线的公共连接点处具有相同的切向量,即满足条件

$$Q_{RC}(0) = q_{RC}(n), Q'_{RC}(0) = q'_{RC}(n) \quad (20)$$

其中, Q_{RC} 和 q_{RC} 为需要进行光滑拼接的有理曲线。

在两段有理 MSIC 进行光滑拼接时,为了达到参数 C^0 连续,只需要将两段曲线段的端点重合即可。下述的条件有助于进行两段曲线段的拼接

$$\begin{aligned} Q_{RC}(0) &= q_{RC}(n), Q'_{RC}(0) = a q'_{RC}(n) \\ \alpha &\in (-\infty, \infty) \end{aligned} \quad (21)$$

2 有理多结点样条插值曲面

有理多结点样条插值曲面是多结点样条插值曲面(MSIS)的自然推广。MSIS 首先需要在张量积曲面上计算两个不同方向上的 MSIC,然后同一般的张量积曲面一样进行生成。

定义 4 一个 $k \times l$ 次的有理 MSIS 定义为

$$Q_{RS}(t, s) = \frac{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \omega_{ij} q_{k,i}(t-i) q_{h,j}(s-j) r_{ij}}{\sum_{u=0}^n \sum_{v=0}^m \omega_{uv} q_{k,u}(t-u) q_{h,v}(s-v)} \quad (22)$$

$t \in [0, n], s \in [0, m]$

其中, $r_{ij}, i=0, 1, \dots, n; j=0, 1, \dots, m$ 呈拓扑矩阵排列,形成一个控制网格; ω_{ij} 为与顶点 r_{ij} 联系的权因子,规定在 4 个顶点处用正的权因子,在其他位置使用非负的权因子; $q_{k,i}(t-i)$ 和 $q_{h,j}(s-j)$ 分别为沿 t 方向的 k 次和沿 s 方向的 h 次多结点样条。

定义 5 有理 MSIS 也可以采用下述的形式进行定义,其参数同定义 4

$$Q_{RS}(t, s) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m q_{k,i,h,j}^R(t, s) r_{ij} \quad (23)$$

$t \in [0, n], s \in [0, m]$

其中

$$q_{k,i,h,j}^R = \frac{\omega_{ij} q_{k,i}(t-i) q_{h,j}(s-j)}{\sum_{u=0}^n \sum_{v=0}^m \omega_{uv} q_{k,u}(t-u) q_{h,v}(s-v)} \quad (24)$$

为双变量的多结点样条曲面的基函数。

有理 MSIS 的基函数和非有理 MSIS 的基函数有如下相类似的函数图形和解析性质:

(1) 局部支撑性

有理 MSIS 在其定义域内非零,在其定义域外为零。

(2) 规范性

由于有理 MSIS 的基函数在定义区间内权和为单位 1,因此,有理 MSIS 的基函数具有规范性。

(3) 可微性

有理 MSIS 的基函数在定义域内导数存在,且在定义域内可以得到其最大和最小值,故其可微性成立。

有理 MSIS 如图 5 所示,它和非有理的 MSIS 具有如下相类似的几何性质:

① 局部性

有理 MSIS 的局部性是非有理 MSIS 的推广。

②凸包性

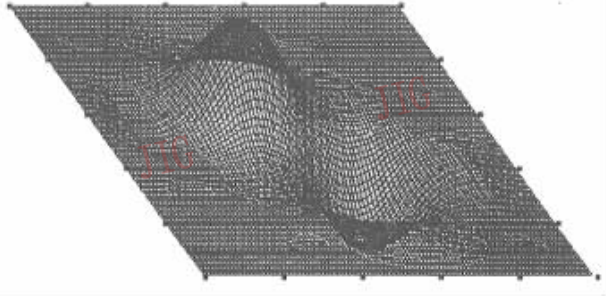
有理 MSIS 不具有凸包性.

③仿射不变性和透视不变性

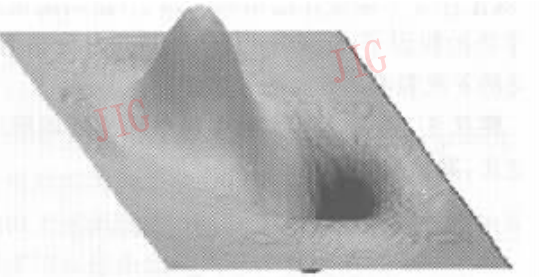
有理 MSIS 具有仿射变换和透视变换下的不变性.

④变差缩减性

有理 MSIS 不具有变差缩减性.



(a) 有理多结点样条插值曲面的线框表示



(b) 有理多结点样条插值曲面的真实感表示

图 5 有理多结点样条插值曲面示例

3 结 语

本文从非有理多结点样条出发,将多结点样条插值曲线推广到有理情况,进而给出了有理多结点样条插值曲线曲面的性质.进一步的工作应着眼于有理多结点样条插值曲线曲面离散生成算法的改进和有理多结点样条插值曲线在曲面生成时所涉及的一系列问题广泛而深入的研究.

参 考 文 献

- 1 齐东旭. 关于多结点基数型 δ -spline 插值(I). 吉林大学学报(自然科学版), 1975, 3: 70~81.
- 2 齐东旭. 关于多结点基数型 δ -spline 插值(II). 吉林大学学报(自然科学版), 1976(2): 36~44.

- 3 齐东旭. 关于多结点基数型 δ -spline 插值(III). 吉林大学学报(自然科学版), 1979, (3): 1~11.
- 4 齐东旭, 梁振珊. 多结点样条磨光(I). 高等学校计算数学学报, 1979, 2: 196~209.
- 5 齐东旭, 梁振珊. 多结点样条磨光(II). 高等学校计算数学学报, 1981, 1: 65~74.
- 6 齐东旭. 多结点样条插值曲线与曲面的矩阵表达式及余项估计. 计算数学, 1982, 3(8): 244~252.
- 7 QI D X, LI H S. Many-knot spline technology for approximation of data. Science in China (Series E), 1999, 42(4): 383~387.
- 8 齐东旭. 分形及其计算机生成. 北京: 科学出版社, 1994.
- 9 齐东旭等. 计算机动画原理与应用. 北京: 科学出版社, 1998.
- 10 YAN W Q, QI D X. Many-Knot spline interpolating curves and their application in font design. CADDM, 1999, 9(1): 1~8.
- 11 Carole B, Christophe S. X-spline: A spline model designed for the end-user. In: Robert Cook ed. In: Proceedings of ACM SIGGRAPH'95. Los, California, 1995: 377~386.
- 12 Farin G. Curves and surfaces for computer aided geometric design (2nd Edition). New York: Academic Press, 1990.
- 13 Donald H, Pauline B M. Computer graphics(Cversion). Beijing: Tsinghua University Press, 1998.

闫伟齐 1968年生, 1996年获西北大学数学系理学硕士学位, 现为中国科学院计算技术研究所博士研究生. 研究方向为计算机图形学.

丁 玮 1971年生, 2000年获中国科学院计算技术研究所计算机应用专业计算机图形学工学博士学位, 现为联想集团发展战略研究部高级研究员. 研究兴趣为数字图象压缩和数字图象信息的隐藏等. 已发表论文近 30 篇.

齐东旭 教授、博士生导师. 主要研究领域为数值分析、计算机辅助几何设计、计算机图形学、计算机动画、数字图象压缩和数字图象的信息安全处理等. 发表论文 130 余篇, 出版专著 5 部.